del- **eller** ***nabla*-operatorn (∇)**

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Gradienten av skalärfältet V

$$\operatorname{grad} V = \nabla V = \left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}\right) = \hat{x}\frac{\partial V}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial V}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial V}{\partial z}$$

Divergensen av vektorfältet $\bar{E}$

$$\operatorname{div} \bar{E} = \nabla \cdot \bar{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \qquad \text{(Ett skalärfält)}$$

Rotationen av vektorfältet $\bar{E}$

$$\operatorname{rot} \bar{E} = \nabla \times \bar{E} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} =$$

$$= \hat{x}\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right) + \hat{y}\left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right) + \hat{z}\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)$$

del- eller *nabla*-operatorn (∇)
– En snabbkurs

Låt V vara ett skalärfält (t.ex. temperatur eller potentiell energi), och $\bar{E}$ ett vektorfält (t.ex. vindhastighet eller elektrisk fältstyrka). ∇-operatorn,

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

kan operera på dessa fält på sätt som motsvarar multiplikation, skalär- respektive kryssprodukt av vektorer.

Gradient

För ett skalärfält gäller att

$$\left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_{(x,y,z)=(a,b,c)}$$

motsvarar storleken hos förändringen i V längs $\hat{x}$-riktningen i punkten (a, b, c). I tre dimensioner, blir motsvarigheten *gradienten av* V:

$$\text{grad } V = \nabla V = \left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z} \right) = \hat{x}\frac{\partial V}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial V}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial V}{\partial z}$$

∇V är ett *vektorfält*, och vektorn ∇V i en given punkt pekar ut den riktning där skalärfältet V ändras fortast, och dess belopp är ett mått på hur snabbt V ändras i denna riktning. ∇V är vidare vinkelrät mot varje ekvipotentialyta, d.v.s. varje yta där V är konstant.

Divergens

Skalärprodukten av ∇-operatorn och ett vektorfält ger *divergensen av* $\bar{E}$, och skrivs:

$$\text{div } \bar{E} = \nabla \cdot \bar{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

$\nabla \cdot \bar{E}$ är ett skalärfält. En fysikalisk innebörd av $\nabla \cdot \bar{E}$ är källstyrkan hos vektorfältet $\bar{E}$, alltså förekomsten av områden där fältlinjer skapas eller försvinner. En divergens som är > 0 i en punkt indikerar att ”någonting” skapas; vektorerna i $\bar{E}$ blir antingen längre, eller divergerar.

Rotation

Kryssprodukten av ∇-operatorn och ett vektorfält ger *rotationen av* $\bar{E}$, och skrivs:

$$\text{rot } \bar{E} = \nabla \times \bar{E} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \hat{x}\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) + \hat{y}\left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) + \hat{z}\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right)$$

rot $\bar{E}$ kallas ibland även för curl $\bar{E}$. $\nabla \times \bar{E}$ är – ungefärligen – ett mått på ”rotationsstyrkan” hos $\bar{E}$ i en punkt (detta skall inte tolkas bokstavligt, då det finns fallgropar där detta kolliderar med vår intuitiva uppfattning om vad ”rotation” innebär...).

Några fysikaliska tolkningar

Potential

För ett potentialfält V gäller alltid att kraften $\bar{F}$ på en partikel i detta fält ges av

$$\bar{F} = -\nabla V$$

d.v.s. kraftvektorn pekar alltid i den riktning dit potentialen *minskar* snabbast.

Ellära

I elektrostatiken gäller bl.a. för den elektriska fältstyrkan $\bar{E}$ att

$$\nabla \cdot \bar{E} = \rho/\epsilon_0 \quad (1)$$

$$\nabla \times \bar{E} = 0 \quad (2)$$

där ρ är laddningstäthet ($\mathrm{C/m^3}$). Innebörden av (1) är att den elektriska fältstyrkan som utgår från ett område är proportionell mot den inneslutna laddningen (laddningen är källan till de elektriska fältlinjerna). Innebörden av (2) är dels att det elektriska fältet är konservativt, eller annorlunda uttryckt, att summan av alla vektorbidrag längs en sluten linje i fältet inte ger något nettobidrag.

Inom magnetostatiken gäller för den magnetiska flödestätheten $\bar{B}$ att

$$\nabla \cdot \bar{B} = 0 \quad (3)$$

vilket kan tolkas som att magnetiska fältlinjer inte har några källor, utan alltid sluter sig i sig själva, så att summan av alla fältvektorer som går in resp. ut ur någon volym alltid kommer att vara noll. (Det känner ni alla till redan, men har tänkt på det som att magneter alltid har en nord- och en sydpol, och att det inte går att hitta en magnet med enbart *en* pol...)

Fluidmekanik

För en *inkompressibel* vätska (konstant densitet) gäller att

$$\nabla \cdot \bar{v} = 0 \quad (4)$$

om $\bar{v}$ är flödeshastigheten. Detta innebär att det inte finns områden med källor till flödeslinjer, d.v.s. det totala flödet in i en volym måste vara detsamma som flödet ut ur denna.

Ett *rotationsfritt* flöde är ett flöde där inget volymselement roterar kring sitt eget masscentrum, vilket är ekvivalent med att

$$\nabla \times \bar{v} = 0 \quad (5)$$